数理解析研究所講究録
425巻 1981年 31-45

待ち行列網におけるPalm測度について

防衛大　　川島　武

1. はじめに

待ち行列網に限らず、G/G/Sモデルの解析などでは(対象となるモデルが $\rho<1$ というような平衡条件を満たしている場合であるが)システムの状態は定常であるという仮定の上で解析を進めることが多い。然し、定常ということは必ずしも一義的なものではなく、何に対して定常かということにより定常の中味が若干異ってくるので、まず、この何かを明確に定義しなければならないであろう。

例えば(連続的な)時刻に関して定常ならば、この定常分布の下では、時刻 t に系内にいる客の数の分布は t によらないし、時間々隔 $(t+a, t+b]$ に到着する客の数、時刻 t かとの後に初めて到着する客の待ち時間、および初めて離脱する客の待ち時間などの分布も、それぞれ t によらず一定である。大雑把に云えば、時刻 t を基準にして説明される事象の確率は、t によらず一定であるとも述べられる。従って、時刻0

からみて、最初に到着する客の挙動と、他の任意時刻tからみて最初に到着する客の挙動は確率的には同等である。但し、時点0からみて、最初に到着する客の待ち時間と、n番目に到着する客の待ち時間の分布は必ずしも一致していない。通常のシステムでは、nが無限大に近づく時の極限分布が存在して、それが次に述べる、到着時点列に関して定常な分布の下での待ち時間の分布になっているのである。このことは、M/M/1で時刻0の列の長さが平衡分布であるとして、時刻0以後に初めて、さらに二番目に客が到着する直前の列の長さの分布をそれぞれ計算してみればもっと明らかになるであろう。

時刻に関して定常という他に、到着時点列に関して定常である分布も存在する。この分布の下では、相続く二つの到着時点の差の分布はどこでも一定であり、一つの到着時点を$a_0=0$とし、それに引き続く到着時点を$a_1, a_2, \cdots$とすれば、a_kの分布と$a_{n+k}-a_n$の分布もnによらず一定である。さらに、a_nを基準として説明される事象は、なんであれ、その確率はnによらないとも云える。時間々隔$(a, b]=(a_0+a, a_0+b]$に到着する人数の分布と$(a_n+a, a_n+b]$に到着する人数の分布もすべてのnについて等しいのである。然し、前に述べたような時刻に関しては定常でないので、任意時刻$(t+a, t+b]$に到着す

る人数，時刻tの列の長さなどの分布はすべてtの関数になっている。そして通常のシステムではtが無限大に近づくときのこれらの極限分布が，時刻に関して定常な分布になっているのである。

一般に，一つの確率過程が時刻に関して定常であり，その確率過程から（時刻に関し定常な）時点列が定義されるとき，その時点列に関して定常な分布が同一の測度空間上に存在し，それをPalm測度と呼んでいる。もとの分布とPalm測度の間では，互いに他の極限分布になっているような性質を持っている。待ち行列過程ではPalm測度を定義する点列としては，到着時点列のほかに，離脱時点列，この二つを重ね合せたものなどがある。定常分布とPalm測度の一般的な関係式は，歴史的にはともかくとして，Miyazawa[7]，[8]に利用しやすい型で紹介されている。

さて待ち行列システムの解析に当り，時刻に関して定常であるということを仮定することは，そのシステムがいつ動き出したかとか，初期状態に無関係な特性量を得ることであり，任意時点の列の長さなどを考えるのに，最も公平な仮定であろう。これに対し，待ち時間などのように個々の客に伴う特性量については，どの客についても同じ特性量をあたえる，到着時点列に関して定常な分布を仮定することが普通であり，

一般に定常な待ち時間分布とは、この場合を指している。つまり、客を選ぶのに、到着時点列の中から任意に選ぶと表現してよいかも知れない。公平な選び方としては、さらに離脱時点列の中から任意の客を選ぶということも当然あり得る。この場合は離脱時点列に関して定常な分布を仮定することである。従って、待ち時間分布を評価するのに、二つのPalm測度、すなわち、

1. P_a；到着時点列に関して定常な分布

2. P_d；離脱時点列に関して定常な分布

があることになり、この二つの分布の下で、待ち時間の分布は相等しいかという疑問が生じる。直感的には等しいと思われるが、ここではこの問題を論じることを目的としている。つまり、二つの事象 B, B′ に対し $P_a(B) = P_d(B')$ となる充分条件を与え、さらにこれを待ち行列網に応用することである。

2. 仮定と基本的な結果

前節と重なるところもあるが、まず必要な記号を導入する。この節で考える待ち行列網は、規律、サービス時間分布などを規定しない一般なものとし、ただ、客は常に一人で行動する、すなわち Batch 到着、Batch サービスはないものとする。

$\xi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ は対象となる待ち行列網の時間軸に沿

った挙動を表わす確率過程とし、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義されているものとする。Ω は $\xi(t)$ の実現値の集合とみなし、$\xi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ から、各窓口での各時点での列の長さのみならずすべての客の待ち時間などが得られる程 $\xi(t)$ の状態空間は適切に定義されているものとする。（可分性も当然仮定する）

以上は大前提であり、さらに $\xi(t)$ について次の性質を仮定する。

(a.1) 分布 P の下で $\xi(t)$ は時刻に関して定常であり、エルゴディクである。

すなわち，$(\Omega, \mathcal{F})$ 上のシフト変換 T_s $(-\infty < s < \infty)$ を

$$(T_s \xi)(t) = \xi(t+s) \quad (-\infty < t < \infty)$$

$$T_s B = \{\xi : T_s \xi \in B, \ B \in \mathcal{F}\}$$

と定義すれば、次が成立している。

$$P(B) = P(T_s B) \quad (B \in \mathcal{F}, \ s \text{は任意実数})$$

任意の s について $T_s B = B$ ならば $P(B) = 1$ か 0.

さて、待ち行列網における一つの窓口に注目し、そこでの到着時点列を $\{a_n\}$ $(\cdots a_0 < 0 \leq a_1 < \cdots)$，離脱時点列を $\{d_n\}$ $(\cdots d_0 < 0 \leq d_1 < \cdots)$ とする。これらはすべて $\xi(t)$ の可測関数であり、$\xi(t)$ が時間々隔 $[a, b]$ に k 個の a_n を持てば $(T_s \xi)(t)$ は区間 $[a-s, b-s]$ に k 個の a_n を持つので $\{a_n\}$ は定常な点過程になっている。$\{d_n\}$ も同様である。これから次が成立する。

(2.1) $a_n \to \infty$, $d_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ w. p. 1 for P .

C_nをa_nに到着する客，C'_nをd_nに離脱する客とし、$C_n = C'_{\nu(n)}$すなわち、各nについてa_nに到着する客は$d_{\nu(n)}$に離脱するものとする。$q(t)$を時刻tの注目している窓口の列の長さとし、

(a.2) $E(q(t)) < \infty$

を仮定する。$q(t)$は定常であることは明らかである。$N(t)$, $N'(t)$をそれぞれ$[0, t)$, $(0, t]$に到着、離脱する客の数とし.

(a.3) $E(N(1)) = \lambda < \infty$

とすれば

(2.2) $q(t) = q(0) + N(t) - N'(t)$ $(t > 0)$

と書けることから次も成立する。

(2.3) $E(N(1)) = E(N'(1)) = \lambda$

さて、P_a, P_dを$\{a_n\}$, $\{d_n\}$に関して定常なPalm測度とする。P_a, P_dは$(\Omega, \mathcal{F})$上の測度であり、Pと同様にすべての$B \in \mathcal{F}$に対して定義されるが$P_a(a_1 = 0) = P_d(d_1 = 0) = 1$となっている。

シフト変換T_sと同様にT_n, T'_nを次のように定義する。

$$(T_n \xi)(t) = \xi(t + a_n(\xi)), \ (T'_n \xi)(t) = \xi(t + d_n(\xi))$$

$$T_n B = \{\xi ; T_n \xi \in B\}, \ T'_n B = \{\xi ; T'_n \xi \in B\}$$

T_s, T_n, T'_nは次のように考えるとわかりやすい。(図1)

例えばBを$\{N'(1) = k\}$とするならば$T_s B$は$(s, s+1]$に離

脱する客の数がk，$T_n B$ は $(a_n, a_{n+1}]$ に離脱する客の数，すなわち，C_n が到着してから単位時間後迄に離脱する客の数がk人いる事象，$T'_n B$ は $(d_n, d_n+1]$ に離脱する客の数がk人いる事象を意味している。一般的に云えば B を時刻 0 を基準として説明される事象とするならば，$T_s B$，$T_n B$，$T'_n B$ はそれぞれ 時点 s，a_n，d_n を基準として説明される事象となっている。

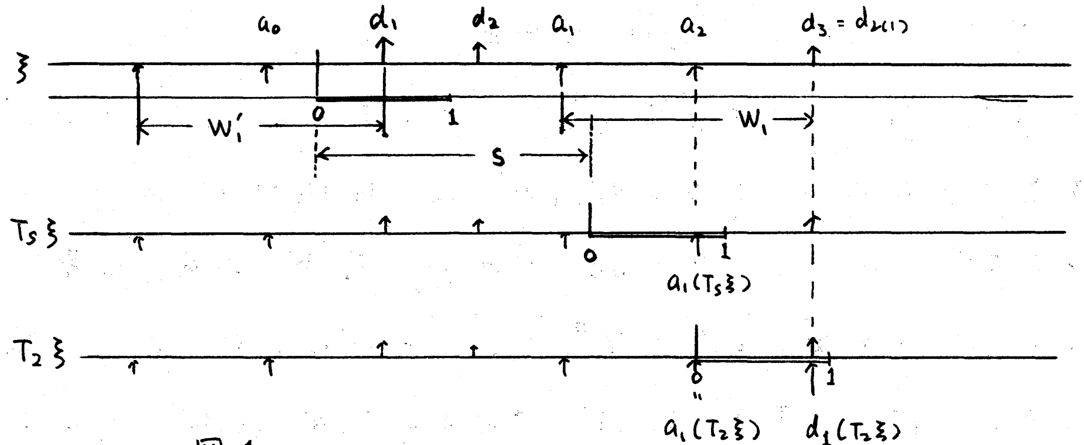

図 1

P_d，P_a について，その定常性は次のように示される。

(2.4) $\quad P_a(B) = P(T_n B)$，$P_d(B) = P_a(T'_n B)$

なお $B = T_1 B$ (a.e. P_a)，$B = T'_1 B$ (a.e. P_d) が成立していることを注意しておく。さて，P_a，P_d は P から Palm 測度として一意に決定されるが，P がエルゴディックの場合には，簡単に次のような Sample average でも決定される。

補助定理 2.1 (cororally 2.1 in Miyazawa [8])

(2.5) $P_a(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\{T_i B\}$ w.p.1 for P,

(2.6) $P_d(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\{T'_i B\}$ w.p.1 for P.

なお 1{ } は指示関数である。以上を用いて次の定理が証明される。

定理 2.2 二つの事象 B, B' に対し $T_1 B = T'_{\ell(1)} B'$ ならば

$P_a(B) = P_d(B')$ が成立する。

証明の前に、この定理の意味を考えよう。例として B, B' をそれぞれ c_1, c_1' の待ち時間 W_1, W_1' (図1参照) が x 以下である事象とすると、$B = T_1 B$ であり、$T'_{\ell(1)}B'$ は $d_{\ell(1)}$ を基準とした W_1' が x 以下となる事象で、この W_1' はもとの W_1 と一致している。従って $T_1 B = T'_{\ell(1)} B'$ である。定理 2.2 はこのとき、P_a での W_1 の分布と P_d での W_1' の分布は一致していることを主張している。なお W_1 について P_a, P_d での分布は一般に異なっている。

定理 2.2 の略証

$T_1 B = T'_{\ell(1)} B'$ よりすべての n について $T_n B = T'_{\ell(n)} B'$ となる。従って $1\{T_n B\} = 1\{T'_{\ell(n)} B'\}$ w.p.1 for P であるから

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\{T_i B\} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\{T'_i B'\}\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} 1\{T'_{\ell(i)} B'\} - \sum_{i=1}^{n} 1\{T'_i B'\}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{n}(q(0)+q(a_n)+1) \to 0$$

最後の不等式は時刻0とa_nに窓口にいる客についてのみ$T'_{L(t_n)}B'$と$T'_{t_n}B'$が異なる可能性があるからである。0に収束することはPのエルゴード性より$N(t)/t$, $N'(t)/t$がλに収束することと(2.1)から導かれる。以上より補助定理2.2を用いて証明される。

3. Jackson型ネットワークへの応用

Jackson型ネットワークに対し、定理2.2を応用し、平均余滞在時間(系を去るまでに要する時間)について簡単な結果を得る。それにはまず、前節で仮定した条件(定常でエルゴード性が成立すること、列の長さの期待値が有界であることなど)が満たされていることを見なければならないが、明らかであろう。ネットワークはM個の窓口からなるものとする。その他の細い定義はJackson[4]にあるが、ここでは不要である。$Q(t)=(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_M(t))$を時刻$t$における列の長さ、$\{a_n\}$, $\{a_{in}\}$, $\{d_{in}\}$ $(i=1,2,\cdots,M)$をそれぞれ外部からの到着時点列、i窓口への到着及び離脱時点列とする。$Q(t)$は$t=a_n, a_{in}, d_{in}$で不連続となるが、これらの時点ではQ(t)を、時点の原因となる客を勘定しないように定義する。例えばa_{in}で客がjからiに移動し、$Q(a_{in})=(q_1, q_2, \cdots, q_M)$

ならば、

$$Q(a_{in}-0) = (q_1, \cdots, q_j+1, \cdots, q_i, \cdots, q_M)$$

$$Q(a_{in}+0) = (q_1, \cdots, q_j, \cdots, q_i+1, \cdots, q_M)$$

となる。特にclosed系では、離散時刻でのΣq_iは1だけ常に少なくなっている。$\{a_n\}$, $\{a_{in}\}$, $\{d_{in}\}$に関して定常なPalm測度をそれぞれP_a, P_{ia}, P_{id}とすれば、時刻に関して定常な分布Pのもとでは$Q(t)$の平衡分布が積形式となっていることより、$Q=(q_1, q_2, \cdots, q_M)$として、

$$P_a\{Q(a_n)=Q\} = P_{ia}\{Q(a_{in})=Q\} = P_{id}\{Q(d_{in})=Q\}$$
$$= f(Q) = f(q_1, q_2, \cdots, q_M) \quad (\text{積形式})$$

と表わされる。(例えばKawashima[5])。ここでi窓口に注目し、a_{i1}に到着する客をC_1, C_1がサービスを終了し他へ(iに戻ってもよい)移動する時刻を$d_{i\nu(1)}$とする。

$B=\{Q(d_{i\nu(1)})=Q\}$, $B'=\{Q(d_{i1})=Q\}$とすると、定理2.1より　$P_{ia}(Q(d_{i\nu(1)})=Q) = P_{id}(Q(d_{i1})=Q) = f(Q)$

従って次を得る。

補助定理3.1　$f(Q)$は次を満たす。

$$f(Q) = \Sigma_{Q'} P_i(Q|Q') f(Q')$$

ここで$P_i(Q|Q')$は$Pr\{Q(d_{i\nu(1)})=Q \mid Q(a_{i1})=Q'\}$である。これは推移確率であり、$P$, P_a, etc によらない。

証明

$$P_{ia}(Q(d_{i\nu(1)})=Q) = \sum_{Q'} P_{ia}(Q(a_{i1})=Q', Q(d_{i\nu(1)})=Q)$$
$$= \sum_{Q'} P_{ia}(Q(a_{i1})=Q') P_i(Q|Q')$$

定理3.2　C_1がI_1, I_2, ---, I_mと順に窓口をたどるとすれば

（$I_n=3$とはC_1がn回目に立寄る窓口は才3窓口である）

(3.1)　$P_a(Q(t_m)=Q \mid I_1=j, I_2=k, \cdots, I_m=i) = f(Q)$

但し　t_k $(k=1,2,\cdots,m)$ は C_1 が　I_kに立寄る時刻とする。

証明

Jackson型ネットワークでは$\{I_1=j\}$と$Q(t_1)$は独立であり

$$P_a(Q(t_1)=Q \mid I_1=j) = P_a(Q(t_1)=Q) = f(Q)。$$

また、I_2は$\{I_1=j\}$という条件の下で、$f(Q(t_1))$, $f(Q(t_2))$と独立であるから、上の式と補助定理3.1を用いて

$$P_a(Q(t_2)=Q \mid I_1=j,\ I_2=k) = \sum_{Q'} P_a(Q(t_2)=Q, Q(t_1)=Q' \mid$$
$$\mid I_1=j, I_2=k) = \sum_{Q'} P_a(Q(t_1)=Q' \mid I_1=j) P_j(Q|Q')$$
$$= \sum_{Q'} f(Q') P_j(Q|Q') = f(Q)$$

となり、これを繰返せば証明される。

この定理は、ある客が定常状態に到着し、$j, k, \cdots$とたどりiに到着したときの、系の状態確率も$f(Q)$であることを示している。この客のiでの待ち時間、系内の残余滞留時間の分布は、この時点での系の状態の分布にのみ依存するので、次の系を得る。

系3．3

$$E_a(t_{n+1} - t_n \mid I_1 = j, I_2 = k, \cdots, I_n = i) = E_{ia}(W_{i1})$$

$$E_a(d - t_n \mid I_1 = j, I_2 = k, \cdots, I_n = i) = E_{ia}(w_{i1})$$

ここで，d は C_1 の系を去る時刻，t_{n+1} は C_1 の n 回目のサービスの終る時刻，W_{i1}，w_{i1} は a_{i1} に i に到着した客の（P_{ia} のもと）残余滞留時間，i での待ち時間　を表わす。E_a，E_{ia} は P_a，P_{ia} についての期待値を示す。客の窓口の移動確率行列を (p_{ij}) とすれば，Kawashima[5] で

$$E_{ia}(W_{i1}) = E_{ia}(w_{i1}) + \sum_{j=1}^{M} p_{ij} E_{ja}(W_{j1}) \quad (i = 1, 2, \cdots, M)$$

が成立することが示されているが，そこでは，ここの補助定理 3.1 を証明なしで使用しているため，証明は厳密ではなかった。

4. Burke 及び Reich の定理について

特別な Jackson 型ネットワークに $M/M/s_1 \to M/s_2$ という直列型がある。これについて Burke[1] は 1 段目の離脱時点列 $\{d_{1n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$（これは同時に 2 段目の到着時点列になっている）に関して定常な分布 P_d の下で，d_{1n} に 1 から 2 の窓口に移動する客の 1，2 での待ち時間を W'_{1n}，W'_{2n} とすると，W'_{1n} と W'_{2n} は独立，すなわち

$$P_{1d}(W'_{1n} \leq x_1, W'_{2n} \leq x_2) = P_{1d}(W'_{1n} \leq x_1) P_{1d}(W'_{2n} \leq x_2)$$

を示した。時刻 a_n に到着する客の待ち時間を W_{1n}，W_{2n} とし

て、$B=\{W_{1n}\leqq x_1, W_{2n}\leqq x_2\}$, $B'=\{W'_{21}\leqq x_1, W'_{21}\leqq x_2\}$ などを考えることにより、定理 2.2 と Burke の結果から

(4.1) $P_{1a}(W_{1n}\leqq x_1, W_{2n}\leqq x_2)=P_{1a}(W_{1n}\leqq x_1)\ P_{1a}(W_{21}\leqq x_2)$

が得られる。 M/M/1 → M/1 → ⋯ → M/1 (M段) についても Reich [9] は各 i ($i=2,3,\cdots,M-1$) について

$$P_{id}(W'_{11}\leqq x_1,\cdots W'_{i1}\leqq x_i, W'_{i+1\,1}\leqq x_i,\cdots, W'_{M1}\leqq x_M)$$

$$=P_{id}(W'_{11}\leqq x_1,\cdots, W'_{i1}\leqq x_i)\ P_{id}(W'_{i+1\,1}\leqq x_i,\cdots, W'_{M1}\leqq x_M)$$

つまり、i番目の窓口で、一人の客のサービス終了時点での状態が定常ならば、1番目からi番目迄の待ち時間と、その後の$i+1$番目からM番目までの待ち時間は独立であることを示した。この事実と定理 2.2 を繰返して用いることにより、

(4.2) $P_{1a}(W_{11}\leqq x_1, W_{21}\leqq x_2,\cdots, W_{M1}\leqq x_M)=P_{1a}(W_{11}\leqq x_1)\cdots P_{1a}(W_{M1}\leqq x_M)$

が証明される。(4.1), (4.2) は到着時点列に関して定常な分布の下でも、一人の客の各窓口での待ち時間は独立であることを示している。

なお M/M/1 では P_aに関して、時間区間 (a_n, a_n+W_n) での Out put flow は input と同じパラメーターを持つポアソン過程になっていることを示し、(4.2) は tree type 網にも成立していることを Lemoine [6] より証明されている。

5. G/G/S について

stationary input を持つ G/G/S について、第2節で挙げた条件を満たす $\xi(t)$ の存在は Miyazawa〔8〕により与えられている。従って、簡単な応用を考える。記号は第2節の通りとする。よく知られた事実に（例えば Franken〔2〕）

$$(5.1)\quad P_a(q(a_1)=k) = P_d(q(d_1)=k) \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

があり、一方、定理2.2から導かれることは

$$(5.2)\quad P_a(q(d_{\nu(1)})=k) = P_d(q(d_1)=k) \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

であり、(5.1) から

$$(5.3)\quad P_a(q(d_{\nu(1)})=k) = P_a(q(a_1)=k) \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

が成り立つ。(5.3) の意味するところは到着時点列から任意に選んだ客の、到着直前の列の長さと、その客の離脱直後の列の長さの分布が等しいということであり、(5.1) は到着時点列から任意に選んだ客の到着直前の列の長さと、離脱時点列から任意に選んだ客の離脱直後の列の長さの分布が一致するということで、意味が異なっている。これらの概念が混同されている文献も見受けられる。（Finch〔3〕）

参考文献

〔1〕 Burke, P. J., "The Output Process of a Stationary M/M/s Queueing Systems," A.M.S. Vol. 39 (1968), pp. 1144 - 1152.

[2] Franken, P., "Einige Anwendungen der Theorie zufälliger Punktprozesse in der Bedienungstheorie I," Math. Nachr., Vol. 70 (1976), pp. 303 - 319.

[3] Finch, P. D., "On the distribution of queue size in queueing problems," Acta Math. Acad. Sci. Hung., Vol. 10 (1959), pp. 327 ~ 336

[4] Jackson, J. R., "Jobshop - Like Queueing Systems," Manag. Sci., Vol. 10 (1963), pp. 131 - 142.

[5] Kawashima, T., "Turnaround time equations in Queueing Networks," J. Opn. Res. J., Vol. 21 (1978), pp 477-485

[6] Lemoine, A. J., "Total Sojourn Time in Networks of Queues," Technical Report No. 79-020-1 (1979), Systems Control, Inc.

[7] Miyazawa, M., "Time and Customer Processes in Queues with Stationary inputs," J. Appl. Prob., Vol 14 (1977), pp. 349-357.

[8] Miyazawa, M., "A Formal Approach to Queuing Processes in the Steady State and Their Applications," J. Appl. Prob. Vol. 16 (1979), pp. 332 - 346.

[9] Reich, E., "Note on Queues in Tandem," A. M. S., Vol. 34 (1963), pp. 338 - 341.